VI. Filtragem espacial

Correlação e Convolução. Filtros passa-baixa, passa-alta e passa-banda. Exemplos de filtros digitais de suavização (média, filtro de Gauss, mediana, suavização conservativa, Kuwahara). Noção de gradiente. Filtros derivativos (Roberts, Prewitt e Sobel). Unsharp. Laplaciano. Laplaciano do gaussiano.

Filtro digital (2D)

Seja H um filtro, caracterizado por uma matriz, que se designará por kernel. Por conveniência, considere-se que H respeita as seguintes condições:

- H é uma matriz quadrada.
- H tem um número ímpar de elementos, ou seja, tem (2N+1)×(2N+1) elementos, e que estes estão indexados desde -N até N, tal que o elemento central de H é H(0,0).
- Os valores de H designam-se por “coeficientes”.

Por exemplo:

	-1	0	1
-1	w1	w2	w3
0	w4	w5	w6
1	w7	w8	w9

Filtro digital (2D)

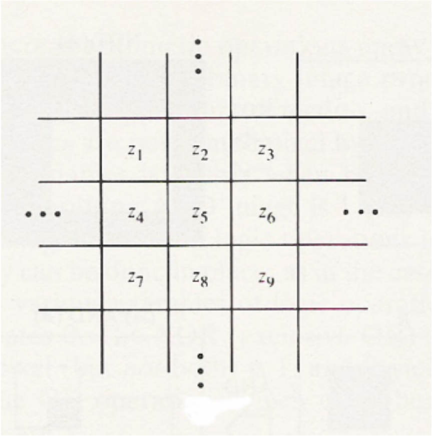
Se o filtro H for 2N×2N Não se perde nada com a aplicação das anteriores condições para H, pois pode-se pegar em qualquer janela e preenchê-la com zeros, por forma a que passe a ser quadrada e com um número ímpar de elementos. Esta operação não muda o comportamento de H.

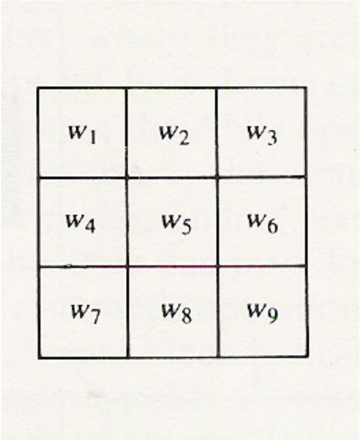
$$\begin{bmatrix} w1 & w2 \\ w4 & w5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} w1 & w2 & 0 \\ w3 & w4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} w1 & w2 \\ w3 & w4 \\ w5 & w6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} w1 & w2 & 0 \\ w3 & w4 & 0 \\ w5 & w6 & 0 \end{bmatrix}$$

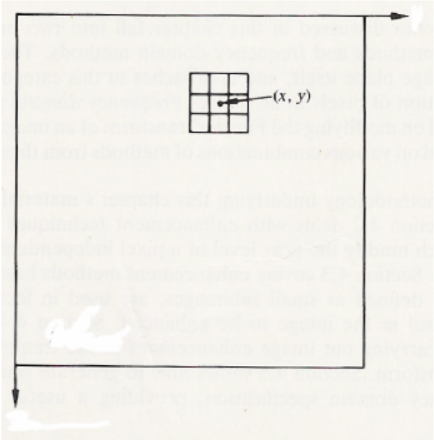
Operações aritméticas

- As operações aritméticas podem também ser formuladas de acordo com operações que envolvem pixels vizinhos.

- Na ilustração a seguir, o valor z_5 corresponde à média ponderada (pesos w_j) dos valores z_j incluídos da janela de dimensão 3 × 3 e centrada em z_5.







$$z = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \cdots + w_9 z_9 = \sum_{i=1}^{9} w_i z_i$$

Fernando Soares

Correlação

Sendo I uma imagem matricial, define-se a operação de **correlação** ("⊗") entre H e I por:

$$H \otimes I(x, y) = \sum_{i=-N}^{N} \sum_{j=-N}^{N} H(i, j) \times I(x + i, y + j)$$

- Por exemplo, para um kernel de 3×3 tem-se:

$$H \otimes I(x, y) = \sum_{i=-1}^{1} \sum_{j=-1}^{1} H(i, j) \times I(x + i, y + j) =$$

$$= H(-1, -1) \times I(x - 1, y - 1) + H(-1,0) \times I(x - 1, y) + H(-1, -1) \times I(x - 1, y + 1) +$$

$$+ H(0, -1) \times I(x, y - 1) + H(0,0) \times I(x, y) + H(0,1) \times I(x, y + 1) +$$

$$+ H(1, -1) \times I(x + 1, y - 1) + H(1,0) \times I(x + 1, y) + H(1,1) \times I(x + 1, y + 1)$$

Fernando Soares

Convolução

- A operação de **convolução** (“*”) é semelhante à da correlação. A diferença consiste em rodar primeiro o kernel H de 180 graus, e só então aplicar a operação de correlação.

$$H * I(x,y) = \sum_{i=-N}^{N} \sum_{j=-N}^{N} H(i,j) \times I(x-i, y-j)$$

- Note-se que a correlação e a convolução são operações idênticas se H for simétrico.

Convolução

A diferença chave entre a correlação e a convolução é a de que a última respeita a propriedade associativa. Ou seja, se G e H são filtros, então,

$$G * (H * I) = (G * H) * I$$

- A verificação desta propriedade torna-se bastante conveniente quando, por exemplo, se pretende aplicar mais do que um filtro a uma imagem.

- Como geralmente as dimensões da imagem I são significativamente maiores que as dos filtros, o esforço de cálculo é reduzido se se executar a convolução entre os dois filtros, seguida da convolução entre o filtro resultante e a imagem.

Fernando Soares

Convolução

No contexto do processamento de imagem, uma das matrizes de entrada é geralmente uma imagem de níveis de cinzento (*I*). A segunda matriz, geralmente bastante mais pequena e igualmente bidimensional (apesar de poder também ser apenas um vector), corresponde ao filtro H, dentro do qual se estabelece uma posição de referência como sendo o seu pixel central (como já antes referido).

z1	z2	z3	z4	z5	z6	z7	z8	z9	z10
z11	z12	z13	z14	z15	z16	z17	z18	z19	z20
z21	z22	z23	z24	z25	z26	z27	z28	z29	z30
z31	z32	z33	z34	z35	z36	z37	z38	z39	z40
z41	z42	z43	z44	z45	z46	z47	z48	z49	z50
z51	z52	z53	z54	z55	z56	z57	z58	z59	z60
z61	z62	z63	z64	z65	z66	z67	z68	z69	z70

Imagem I

Filtro H

w1	w2	w3
w4	w5	w6
w7	w8	w9

Correlação

w9	w8	w7
w6	w5	w4
w3	w2	w1

Convolução

Convolução

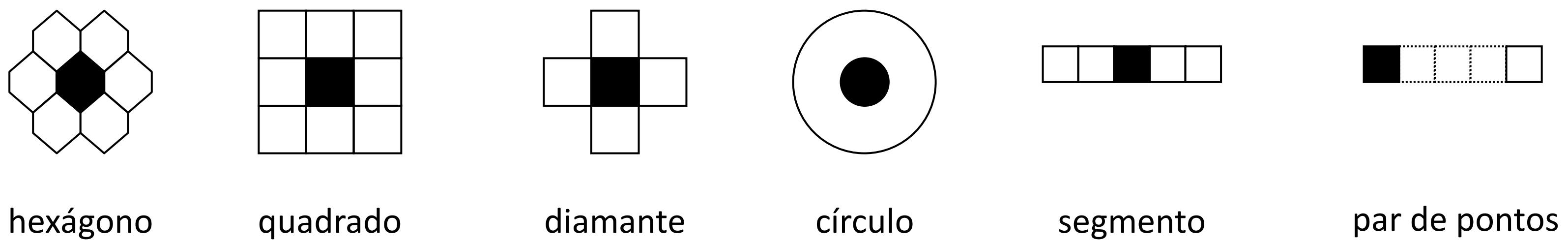
- Para os pixels de fronteira da imagem há que fazer uma adaptação para a convolução se executar. Uma das quatro seguintes opções pode ser seguida:

1. Usa-se apenas a convolução que considere os subconjuntos de pixels de H que estejam dentro dos limites da imagem I.
2. São escolhidos valores iguais a zero para os pixels das regiões que estão fora da imagem, mas tal escolha pode distorcer a intensidade dos pixels de fronteira na imagem.
3. Acrescenta-se linhas e colunas à imagem. Cada pixel destas, terá um valor igual ao do pixel da imagem que dele estiver mais próximo.
4. Acrescenta-se linhas e colunas à imagem, por forma a que reflita uma continuidade de carácter periódico, do interior para o exterior da imagem.

Fernando Soares

Configuração geométrica dos filtros digitais

- Apresentam-se a seguir alguns exemplos da geometria de *H* que se podem usar para a convolução. Para além dos valores dos coeficientes associados, a forma e a dimensão são características segundo as quais *H* também pode variar.



Propriedades

- A classificação das janelas de convolução faz-se segundo duas propriedades que condicionam dos resultados; são elas a <u>convexidade</u> e a <u>isotropia</u>.

	Isotrópico	**Anisotrópico**
Convexo	Disco	Segmento
Não convexo	Contorno do disco	Par de pontos

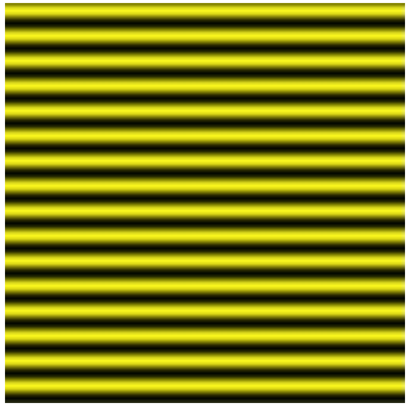
Fernando Soares

Filtros espaciais

- A frequência espacial de uma imagem é uma característica que pode ser definida por um parâmetro correspondente ao <u>número de variações de níveis de cinzento por unidade de distância</u>.

- Se há poucas variações de tons de cinzento numa dada zona diz-se que essa zona é de <u>baixa frequência</u>; se os tons de cinzento variam muito em distâncias pequenas diz-se que essa zona é de <u>alta frequência</u>.

Sinal de baixa frequência



Sinal de alta frequência

Filtros espaciais

- Os **filtros** espaciais são operadores que permitem alterar a frequência espacial de uma imagem (sinal), modificando o valor do tom de cinzento de cada pixel em função dos valores dos tons de cinzento dos pixels da sua vizinhança.

- Os filtros podem ser lineares ou não-lineares. Nos filtros lineares cada pixel resulta de uma combinação linear entre os pixels da sua vizinhança, com coeficientes que correspondem aos pesos a atribuir às parcelas.

$$F(i,j) = \sum_{m \in H} \sum_{n \in H} H(m,n) \times f(i-m, j-n)$$

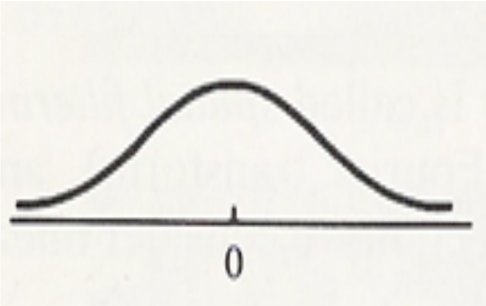
F: imagem filtrada;
f: imagem inicial;
H: filtro (coeficientes);

- Quaisquer outros filtros são designados por filtros não lineares.

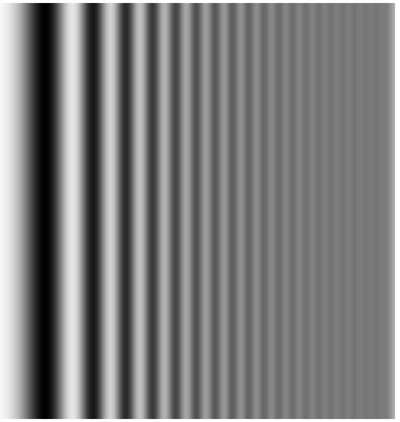
Filtro passa-baixa

Filtro que suaviza o aspecto da imagem atenuando eventos de elevada frequência (transições abruptas), isto é, as zonas de fronteira radiométrica. Tende a minimizar ruídos e o resultado apresenta um efeito de desfocagem.

A forma da função resposta necessária para implementar um filtro passa-baixa indica que este deve ter todos os seus coeficientes positivos, devendo a respectiva soma ser igual a 1.



Função-resposta



Efeito

Filtro passa-baixa

- Por exemplo, no filtro passa-baixa da média aritmética 3 x 3, tem-se:

$f_{i-1,j-1}$	$f_{i-1,j}$	$f_{i-1,j+1}$
$f_{i,j-1}$	$f_{i,j}$	$f_{i,j+1}$
$f_{i+1,j-1}$	$f_{i+1,j}$	$f_{i+1,j+1}$

Função

1/9 ×

1	1	1
1	1	1
1	1	1

=

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

Coeficientes

	$PB_{i,j}$	

Valor a calcular

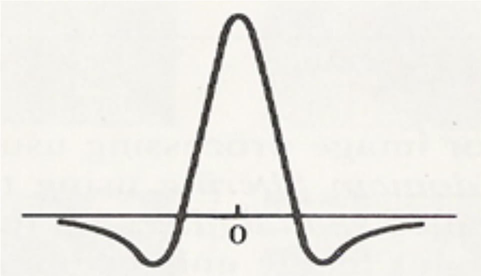
- Por convolução, tem-se:

$$PB_{i,j} = \frac{1}{9}\times f_{i-1,j-1} + \frac{1}{9}\times f_{i-1,j} + \frac{1}{9}\times f_{i-1,j+1} + \frac{1}{9}\times f_{i,j-1} + \frac{1}{9}\times f_{i,j} + \frac{1}{9}\times f_{i,j+1} + \frac{1}{9}\times f_{i+1,j-1} + \frac{1}{9}\times f_{i+1,j} + \frac{1}{9}\times f_{i+1,j+1}$$

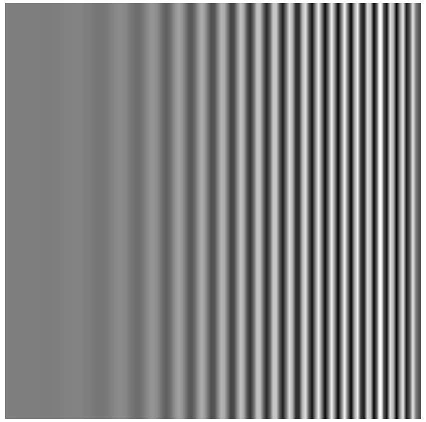
Filtro passa-alta

Filtro que atenua, ou elimina, os eventos da imagem com baixa frequência, pelo que os filtros tornam mais nítidas as fronteiras radiométricas e os detalhes.

- A forma da função resposta necessária para implementar um filtro passa-alta indica que este deve ter os coeficientes positivos na vizinhança do centro e negativos na periferia, devendo a respectiva soma ser igual a 0.



Função-resposta



Efeito

Filtro passa-alta

Filtro Passa-Alta = Imagem original - Filtro Passa-Baixa

- Por exemplo, a partir do filtro da média anterior tem-se:

$$PA_{i,j} = f_{i,j} - PB_{i,j} =$$
$$= f_{i,j} - \left(\frac{1}{9}\times f_{i-1,j-1} + \frac{1}{9}\times f_{i-1,j} + \frac{1}{9}\times f_{i-1,j+1} + \frac{1}{9}\times f_{i,j-1} + \frac{1}{9}\times f_{i,j} + \frac{1}{9}\times f_{i,j+1} + \frac{1}{9}\times f_{i+1,j-1} + \frac{1}{9}\times f_{i+1,j} + \frac{1}{9}\times f_{i+1,j+1}\right) =$$
$$= -\frac{1}{9}\times f_{i-1,j-1} - \frac{1}{9}\times f_{i-1,j} - \frac{1}{9}\times f_{i-1,j+1} - \frac{1}{9}\times f_{i,j-1} + \frac{8}{9}\times f_{i,j} - \frac{1}{9}\times f_{i,j+1} - \frac{1}{9}\times f_{i+1,j-1} - \frac{1}{9}\times f_{i+1,j} - \frac{1}{9}\times f_{i+1,j+1}$$

$f_{i-1,j-1}$	$f_{i-1,j}$	$f_{i-1,j+1}$
$f_{i,j-1}$	$f_{i,j}$	$f_{i,j+1}$
$f_{i+1,j-1}$	$f_{i+1,j}$	$f_{i+1,j+1}$

Função

1/9 ×

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

=

-1/9	-1/9	-1/9
-1/9	8/9	-1/9
-1/9	-1/9	-1/9

Coeficientes

	$PA_{i,j}$	

Valor a calcular

Filtro passa-alta

- Os filtros passa-alta podem ser "desenhados" em função da direcção. Neste caso o kernel contém coeficientes que variam em função da orientação que apresentam na imagem as fronteiras que se pretende realçar.

NW

1	1	1
1	-2	-1
1	-1	-1

N

1	1	1
1	-2	1
-1	-1	-1

NE

1	1	1
-1	-2	1
-1	-1	1

W

1	1	-1
1	-2	-1
1	1	-1

E

-1	1	1
-1	-2	1
-1	1	1

SW

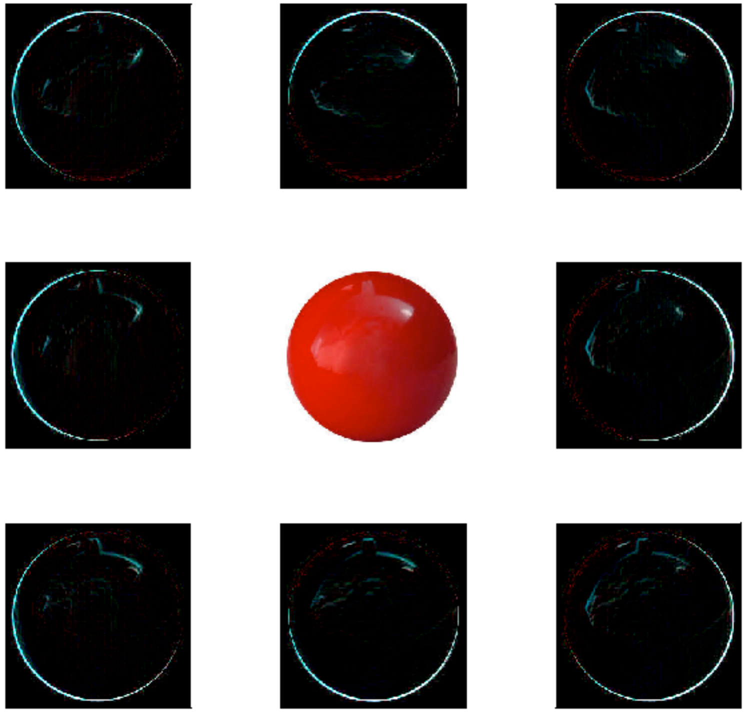
1	-1	-1
1	-2	-1
1	1	1

S

-1	-1	-1
1	-2	1
1	1	1

SE

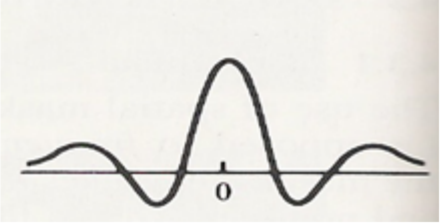
-1	-1	1
-1	-2	1
1	1	1



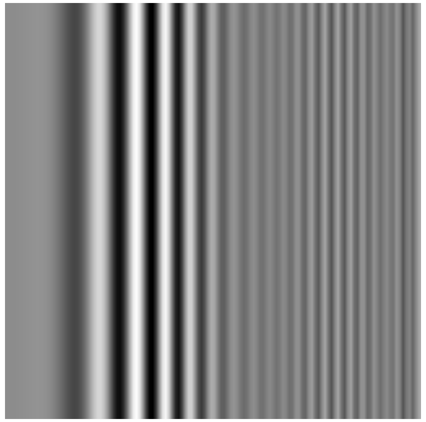
Filtro passa-banda

Filtro que remove/atenua determinados intervalos de frequências.

- A forma da função resposta necessária para implementar um filtro passa-banda indica que este deve ter os coeficientes positivos na vizinhança do centro e alternadamente negativos e positivos no sentido da periferia.



Função-resposta



Passa-banda

Fernando Soares

Filtro passa-banda

$$\boxed{\textit{Filtro Passa-Banda} = \textit{Filtro Passa-Baixa 1 - Filtro Passa-Baixa 2}}$$

- Tipicamente, os filtros PB1 e PB2 devem representar médias de curto-termo e de longo-termo.

- Os filtros Passa-Banda são geralmente usados para realçar as fronteiras e outras características de filtragem passa-alta na presença de ruído.

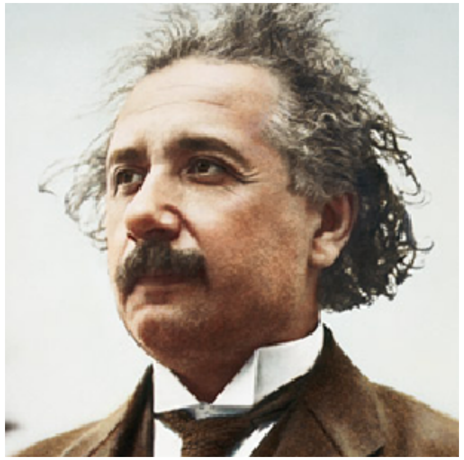
Fernando Soares

Exemplos de filtros passa-baixa

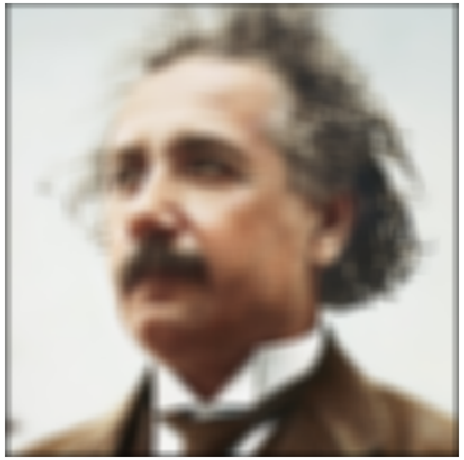
Média: É o mais simples filtro linear passa-baixa. Todos os coeficientes são iguais. Calcula-se a média dos tons de cinzento no interior da janela (H) e substitui-se o pixel central da janela pelo valor resultante (por esta razão as janelas são normalmente quadradas com dimensão ímpar (3 x 3, 5 x 5, etc.).

$$H_{3\times3} = \frac{1}{9} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{9\times9} = \frac{1}{81} \times \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$



Inicial



Média 9 x 9

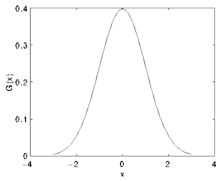
Exemplos de filtros passa-baixa

Média ponderada: Os coeficientes têm pesos diferentes (geralmente em função da distância ao pixel central).

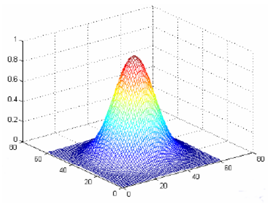
$$H_{3\times 3} = \frac{1}{8} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad H_{3\times 3} = \frac{1}{10} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad H_{3\times 3} = \frac{1}{16} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplos de filtros passa-baixa

Gaussiano 2-D: é um operador de convolução usado para “desfocar” imagens e remover detalhe e ruído, à semelhança do filtro da média. No entanto, utiliza um kernel representado sob a forma de uma “bossa” gaussiana (em forma de sino).



$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \times e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}$$



$$G(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \times e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$G_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0.0113 & 0.0838 & 0.0113 \\ 0.0838 & 0.6193 & 0.0838 \\ 0.0113 & 0.0838 & 0.0113 \end{bmatrix}$$

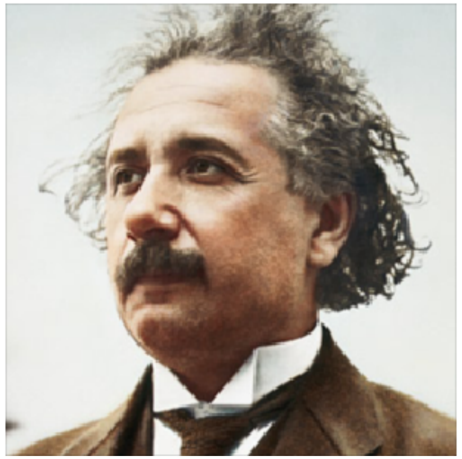
Exemplo

Fernando Soares

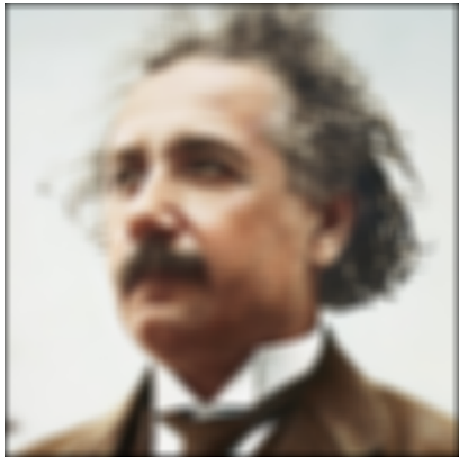
Exemplos de filtros passa-baixa

- O efeito da suavização gaussiana é o de desfocar uma imagem, tal como o faz o filtro da média.

- O grau de suavização é determinado pelo valor do desvio-padrão da função de Gauss (funções com desvios-padrão mais altos requerem janelas de convolução maiores no sentido de as funções ficarem mas bem representadas).



Gaussiana (σ^2 = 0.5)



Gaussiana (σ^2 = 5)

Fernando Soares

Exemplos de filtros passa-baixa

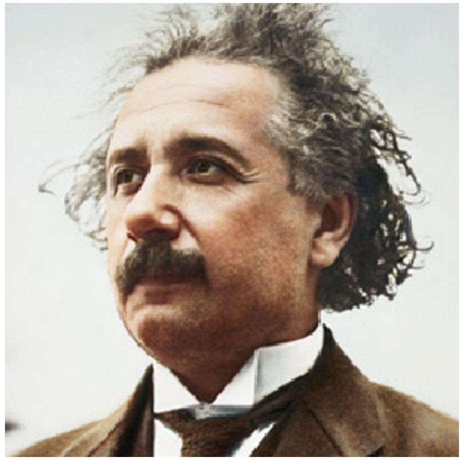
- O filtro gaussiano consiste numa média ponderada da vizinhança de cada pixel, com maior peso aplicado ao pixel central e diminuíndo progressivamente para o exterior. Esta definição contrasta com o filtro da média aritmética, em que os pesos estão uniformemente distribuídos por todos os pixels da janela de convolução.

- Como tal, o filtro gaussiano proporciona uma suavização mais “delicada” que o da media, preservando melhor as fronteiras entre objectos.

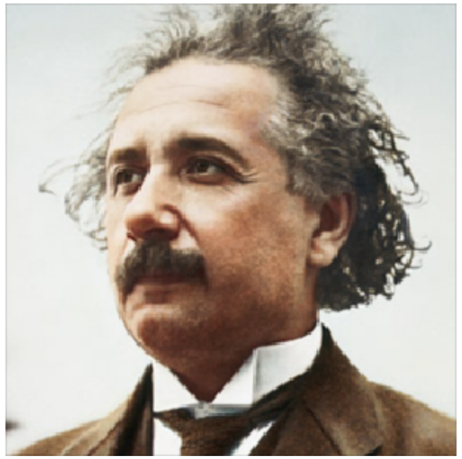
- O uso deste filtro torna-se também mais “atractivo” quando por vezes estão envolvidos fenómenos cujas respostas têm comportamentos gaussianos.

Exemplos de filtros passa-baixa

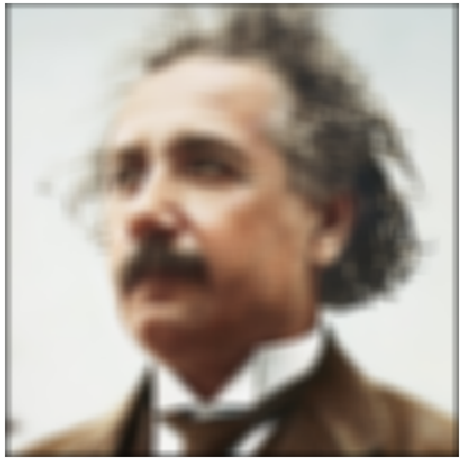
- **Exemplo**: Diferença entre os filtros da media e gaussiano:



inicial



Gaussiano 9 x 9



Média 9 x 9

Fernando Soares

Exemplos de filtros passa-baixa

Mediana: é um filtro não-linear de suavização, e é normalmente usado para reduzir o ruído numa imagem, tal como o filtro da média. Contudo, o resultado é quase sempre melhor que o do filtro da média, no sentido da preservação do detalhe útil da imagem.

$$Med(i,j) = median[f(i-m, j-n)], (m,n) \in H$$

123	125	126	130	140
122	124	126	127	135
118	120	150	125	134
119	115	119	123	133
111	116	110	120	130

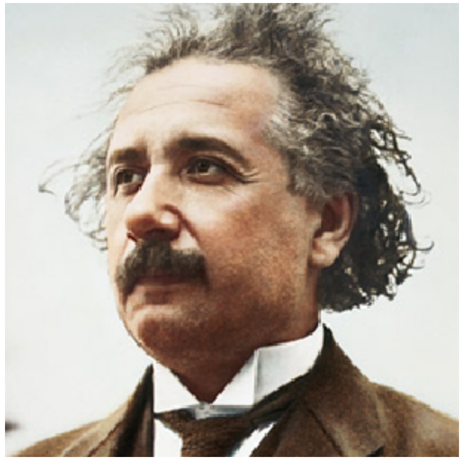
Valores da vizinhança

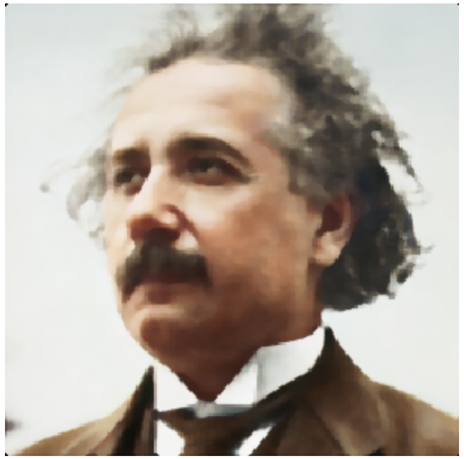
115, 119, 120, 123, 124,
125, 126, 127, 150

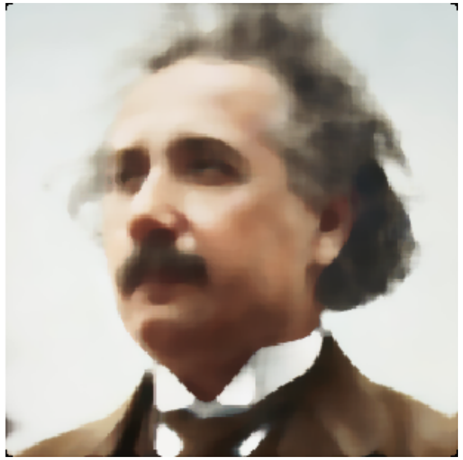
Mediana: 124

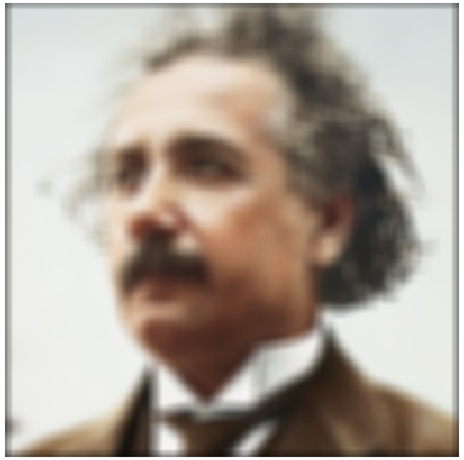
Exemplos de filtros passa-baixa

Exemplo: filtro da mediana.


Inicial


Mediana 5 x 5


Mediana 9 x 9


Média 9 x 9

Exemplos de filtros passa-baixa

Suavização conservativa: técnica de redução de ruído que visa a preservação dos detalhes de alta frequência (transições) da imagem. É usado explicitamente na remoção de "picos" isolados de intensidade (altos e baixos).

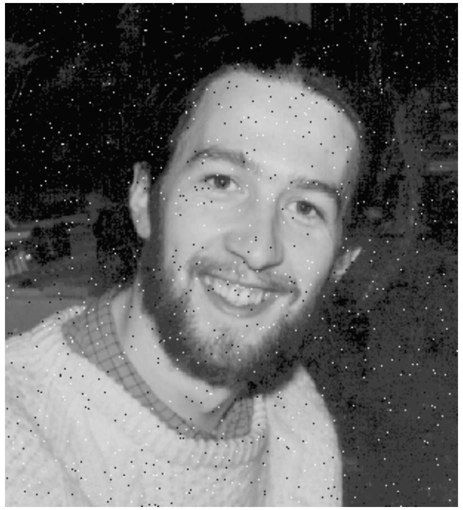
123	125	126	130	140
122	124	126	127	135
118	120	150	125	134
119	115	119	123	133
111	116	110	120	130

Valor central: 150

Vizinhança:
115, 119, 120, 123,
124, 125, 126, 127

Max.: 127
Min.: 115

Resultado: **150 é substituído por 127**



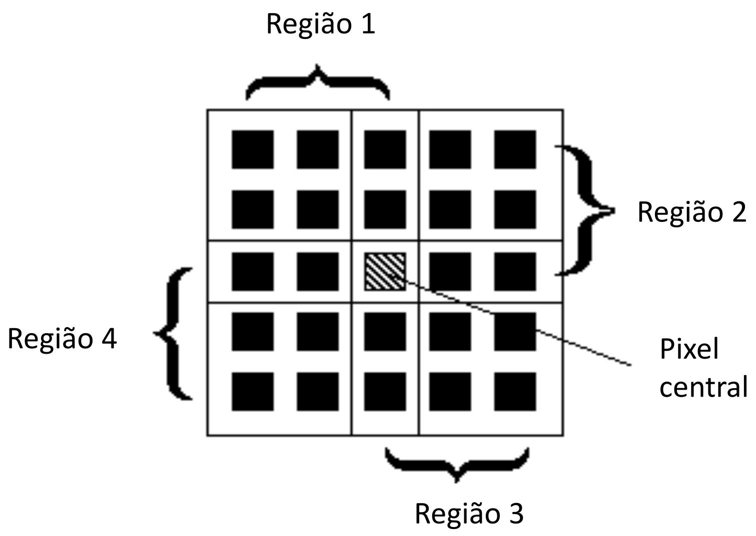
Antes

Depois

Exemplos de filtros passa-baixa

Kuwahara: Suaviza uma imagem sem perturbar a nitidez e a posição das fronteiras.

- Embora possa ser implementado em janelas de formas diversas, considera-se aqui uma janela quadrada de dimensão ímpar. Esta janela é dividida em 4 regiões e em cada uma delas calcula-se a intensidade média m_i e a variância s_i^2, (i = 1, 2, 3, 4). O valor atribuído ao pixel central da janela corresponde ao valor médio da janela que tem menor variância.



Fernando Soares

Exemplos de filtros passa-baixa

Exemplo: Suavização de Kuwahara.

Inicial

Kuwahara 5 x 5

Mediana 5 x 5

Inicial

Kuwahara 5 x 5

Exemplos de filtros passa-alta (derivativos)

- Como se viu, os filtros passa-baixa esbatem/eliminam os eventos de detalhe contidos nas imagens.

- A diferenciação vai ter o efeito contrário, ou seja, evidenciar o detalhe.

- Para além dos filtros passa-alta, definem-se assim outros filtros designados por <u>filtros derivativos</u> (operadores de gradiente).

Exemplos de filtros passa-alta (derivativos)

Gradiente: O gradiente de uma função f, no ponto (x,y), define-se por, $\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$.

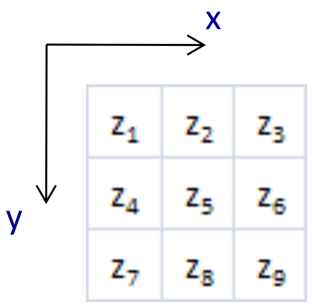
- A magnitude é dada por $mag(\nabla f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$.

- Estes conceitos constituem a base de diversas abordagens de diferenciação da imagem.

Fernando Soares

Exemplos de filtros passa-alta (derivativos)

- Considerando a janela da figura, pode aproximar-se a equação anterior no ponto z_5 de diversas formas. A mais simples é utilizar a diferença $(z_5 - z_6)$ para definir a derivada parcial na direcção x e a diferença $(z_5 - z_8)$ para definir a derivada parcial na direcção y.



$$f(z_5) = mag(\nabla f) \approx \sqrt{(z_5 - z_6)^2 + (z_5 - z_8)^2}$$

ou

$$f(z_5) = mag(\nabla f) \approx |z_5 - z_6| + |z_5 - z_8|$$

Exemplos de filtros passa-alta (derivativos)

Roberts: este filtro executa o gradiente cruzado, isto é, em vez de calcular as diferenças de valores de brilho na direcção vertical e horizontal, fá-lo numa direcção rodada de 45º, onde as janelas de convolução são as seguintes:

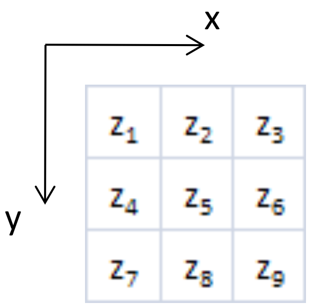
1	0
0	-1

0	1
-1	0

$$f(z_5) = mag(\nabla f) \approx \sqrt{(z_5 - z_9)^2 + (z_6 - z_8)^2}$$

ou

$$f(z_5) = mag(\nabla f) \approx |z_5 - z_9| + |z_6 - z_8|$$



Exemplos de filtros passa-alta (derivativos)

Roberts (exemplo 1):

0	0	0	50	50	50
0	0	0	50	50	50
0	0	0	50	50	50
0	0	0	50	50	50
0	0	0	50	50	50
0	0	0	50	50	50

1	0
0	-1

0	0	-50	0	0	...
0	0	-50	0	0	...
0	0	-50	0	0	...
0	0	-50	0	0	...
0	0	-50	0	0	...
...	...	...	...	...	...

$g_1(i,j) = f(i,j) - f(i+1, j+1)$

0	1
-1	0

0	0	50	0	0	...
0	0	50	0	0	...
0	0	50	0	0	...
0	0	50	0	0	...
0	0	50	0	0	...
...	...	...	...	...	...

$g_2(i,j) = f(i, j+1) - f(i+1, j)$

0	0	100	0	0	...
0	0	100	0	0	...
0	0	100	0	0	...
0	0	100	0	0	...
0	0	100	0	0	...
...	...	...	...	...	...

$g(i,j) = |g_1(i,j)| + |g_2(i,j)|$

Fernando Soares

Exemplos de filtros passa-alta (derivativos)

Roberts (exemplo 2):

1	0
0	-1

50	50	50	50	50	50
0	50	50	50	50	50
0	0	50	50	50	50
0	0	0	50	50	50
0	0	0	0	50	50
0	0	0	0	0	50

0	1
-1	0

0	0	0	0	0	…
0	0	0	0	0	…
0	0	0	0	0	…
0	0	0	0	0	…
0	0	0	0	0	…
…	…	…	…	…	…

$g_1(i,j) = f(i,j) - f(i+1,j+1)$

50	0	0	0	0	…
50	50	0	0	0	…
0	50	50	0	0	…
0	0	50	50	0	…
0	0	0	50	50	…
…	…	…	…	…	…

$g_2(i,j) = f(i,j+1) - f(i+1,j)$

50	0	0	0	0	…
50	50	0	0	0	…
0	50	50	0	0	…
0	0	50	50	0	…
0	0	0	50	50	…
…	…	…	…	…	…

$g(i,j) = |g_1(i,j)| + |g_2(i,j)|$

Exemplos de filtros passa-alta (derivativos)

Sobel: este operador realça linhas verticais e horizontais mais escuras que o fundo, sem realçar pontos isolados. Consiste na aplicação de duas máscaras, descritas a seguir, que compõem um resultado único.

x

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

y

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

x

y

z_1	z_2	z_3
z_4	z_5	z_6
z_7	z_8	z_9

$$S_x = (z_1 + 2\times z_4 + z_7) - (z_3 + 2\times z_6 + z_9)$$

$$S_y = (z_1 + 2\times z_2 + z_3) - (z_7 + 2\times z_8 + z_9)$$

$$f(z_5) = |S_x| + |S_y|$$

Exemplos de filtros passa-alta (derivativos)

Sobel (exemplo):

	-1	*0*	*1*
-1	1	0	-1
0	2	0	-2
1	1	0	-1

0	0	0	50	50	50
0	0	0	50	50	50
0	0	0	50	50	50
0	0	0	50	50	50
0	0	0	50	50	50
0	0	0	50	50	50

	-1	0	1
-1	1	2	1
0	0	0	0
1	-1	-2	-1

…	…	…	…	…	…
…	0	200	200	0	…
…	0	200	200	0	…
…	0	200	200	0	…
…	0	200	200	0	…
…	…	…	…	…	…

S_x

…	…	…	…	…	…
…	0	0	0	0	…
…	0	0	0	0	…
…	0	0	0	0	…
…	0	0	0	0	…
…	…	…	…	…	…

S_y

…	…	…	…	…	…
…	0	200	200	0	…
…	0	200	200	0	…
…	0	200	200	0	…
…	0	200	200	0	…
…	…	…	…	…	…

$|S_x| + |S_y|$

Exemplos de filtros passa-alta (derivativos)

Prewitt: este operador realça linhas verticais e horizontais mais escuras que o fundo, sem realçar pontos isolados. Consiste na aplicação de duas máscaras, descritas a seguir, que compõem um resultado único.

x

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

y

-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1

x

y

z_1	z_2	z_3
z_4	z_5	z_6
z_7	z_8	z_9

$$S_x = (z_1 + z_4 + z_7) - (z_3 + z_6 + z_9)$$

$$S_y = (z_1 + z_2 + z_3) - (z_7 + z_8 + z_9)$$

$$f(z_5) = |S_x| + |S_y|$$

Exemplos de filtros passa-alta (derivativos)

Prewitt (completar):

1	0	-1
1	0	-1
1	0	-1

0	0	0	50	50	50
0	0	0	50	50	50
0	0	0	50	50	50
0	0	0	50	50	50
0	0	0	50	50	50
0	0	0	50	50	50

1	1	1
0	0	0
-1	-1	-1

…	…	…	…	…	…
…					…
…					…
…					…
…					…
…	…	…	…	…	…

S_x

…	…	…	…	…	…
…					…
…					…
…					…
…					…
…	…	…	…	…	…

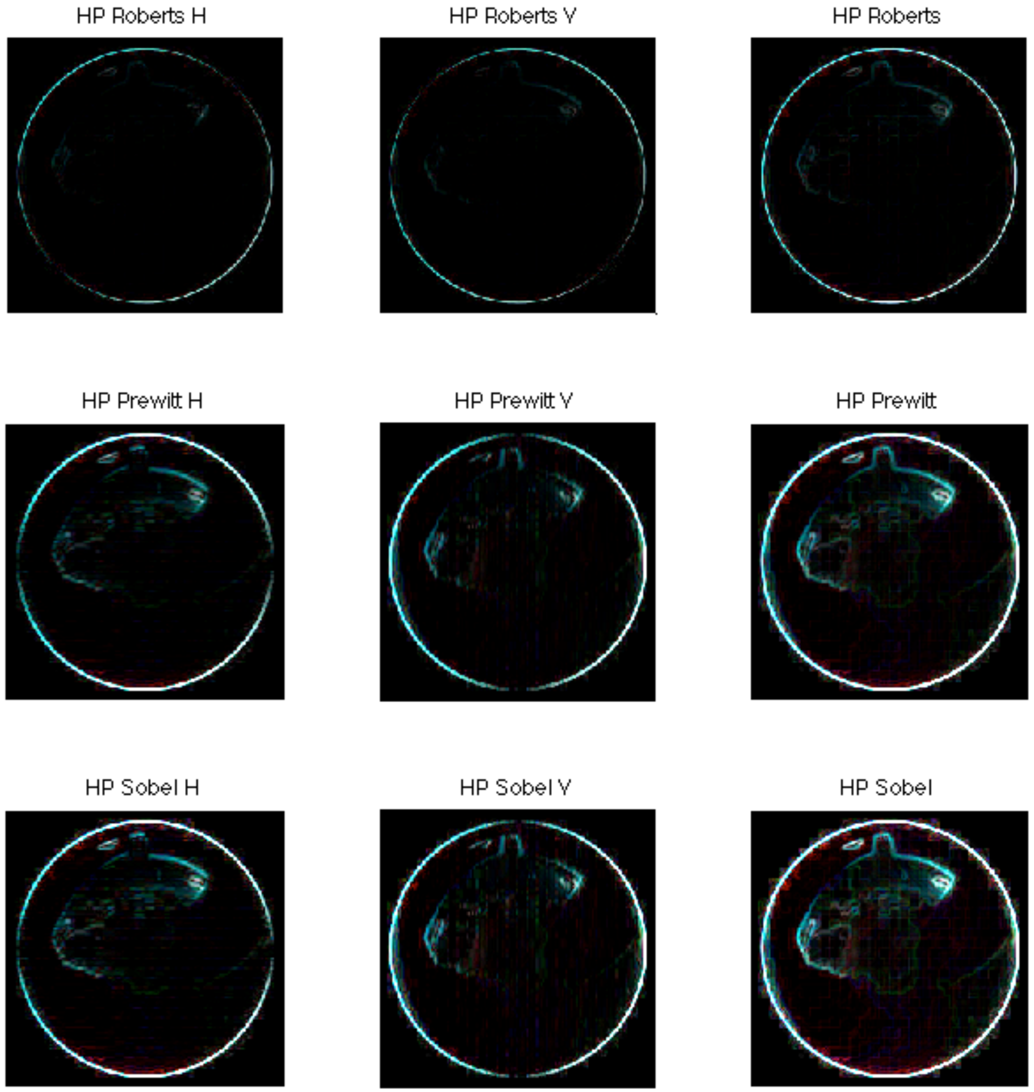
S_y

…	…	…	…	…	…
…					…
…					…
…					…
…					…
…	…	…	…	…	…

$|S_x| + |S_y|$

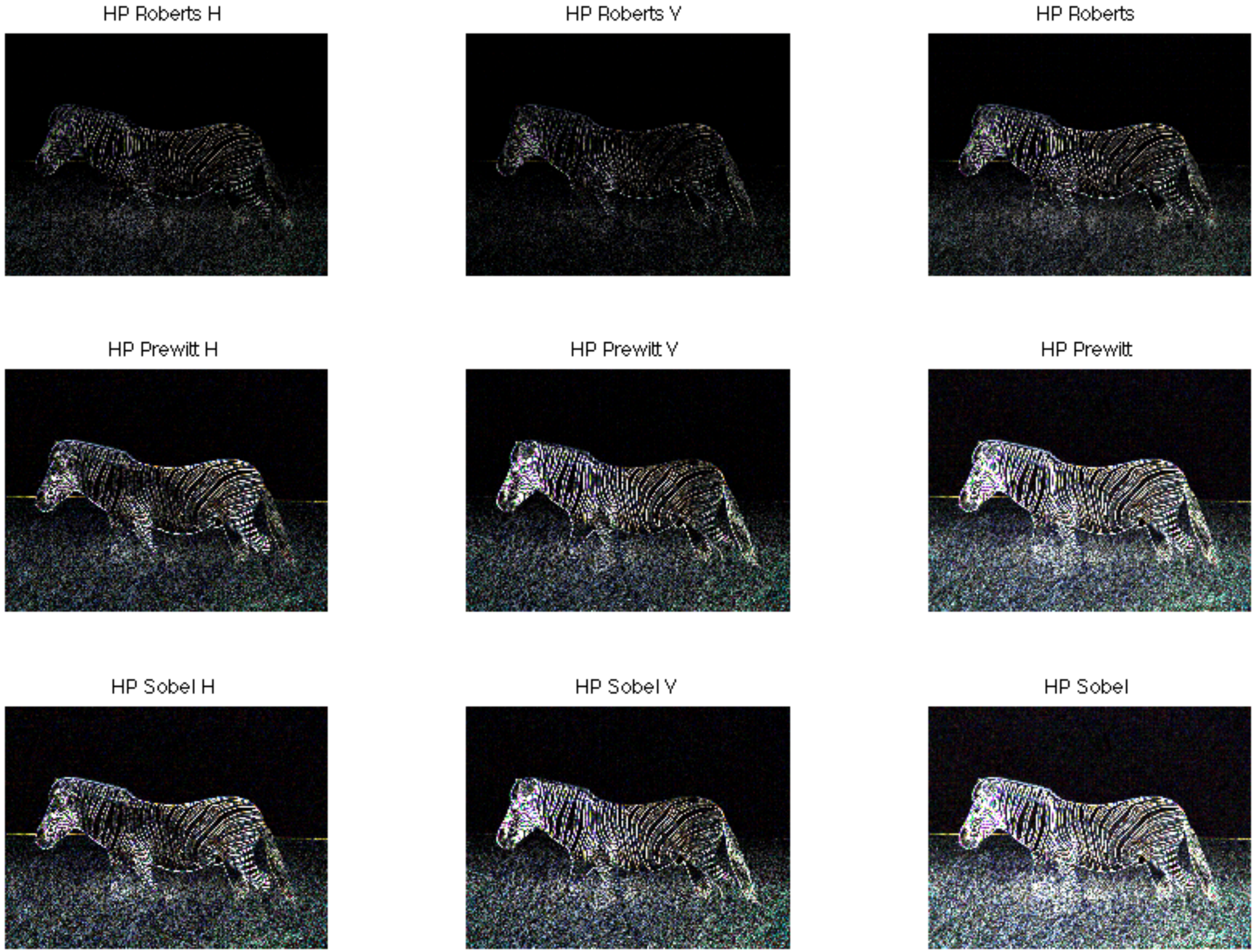
Exemplos de filtros passa-alta (derivativos)

- Operadores de gradiente:



Exemplos de filtros passa-alta (derivativos)

- Operadores de gradiente:

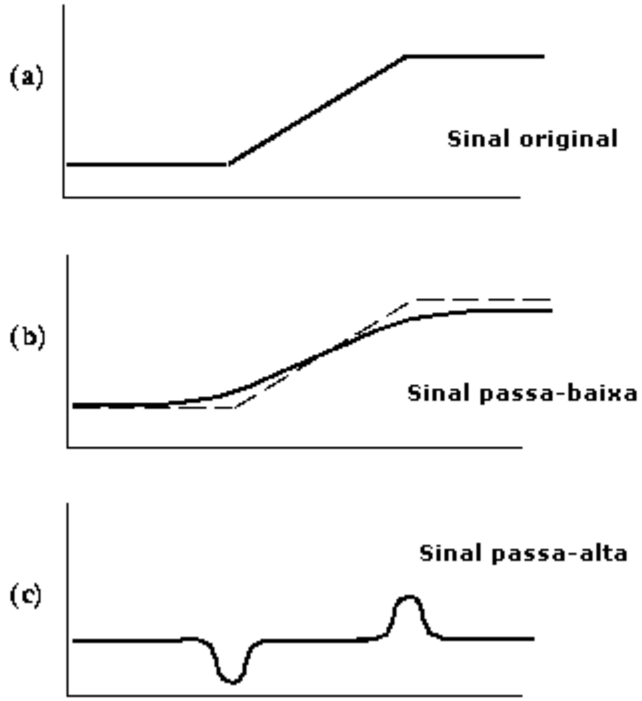


Fernando Soares

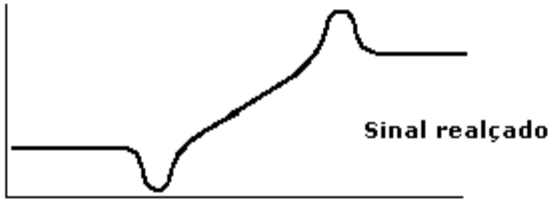
Operação de *Unsharp*

Permite fazer sobressair as fronteiras dos objectos de uma imagem, através da operação de subtracção entre a imagem original e a imagem suavizada com um filtro passa-baixa.

$$u(i,j) = f(i,j) + [f(i,j) - k \times PB(i,j)], \qquad 0 \leq k \leq 1$$

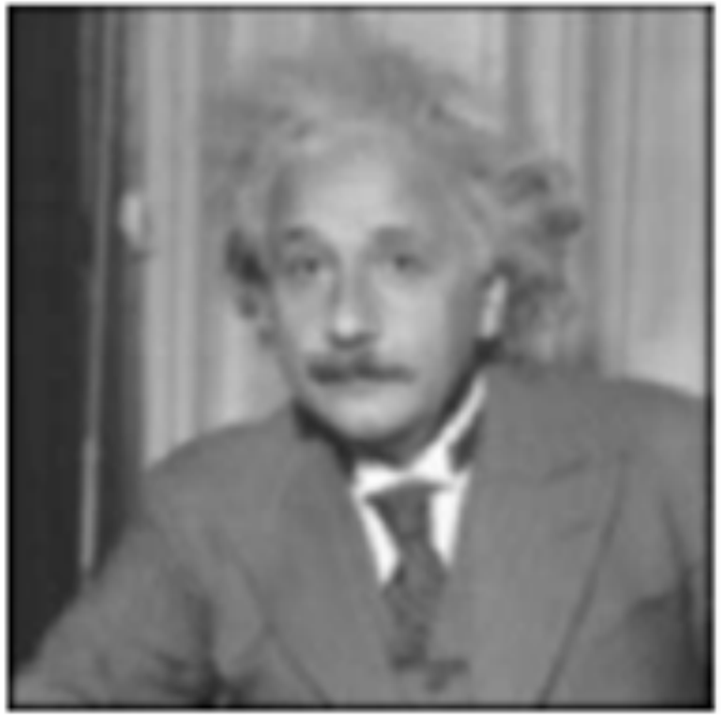


(a) + (c)

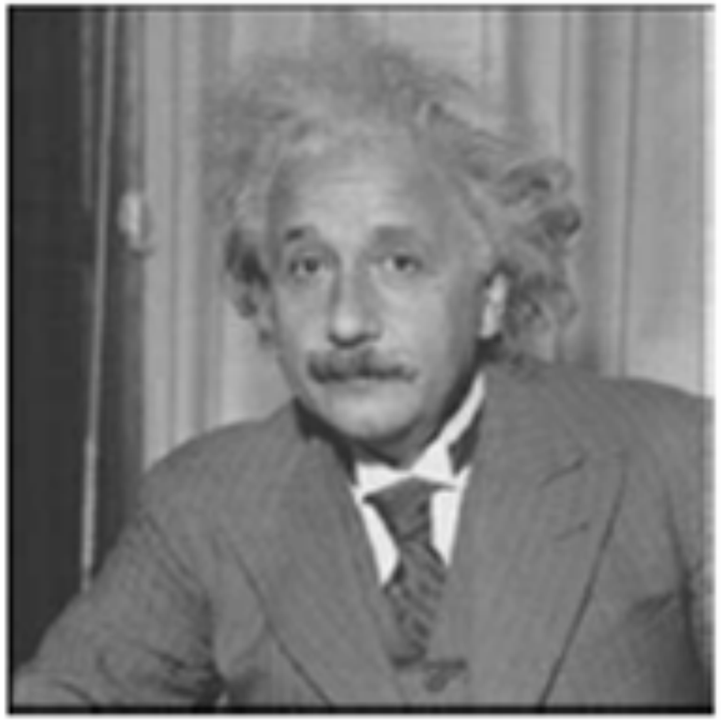


Operação de *Unsharp*

Exemplo:



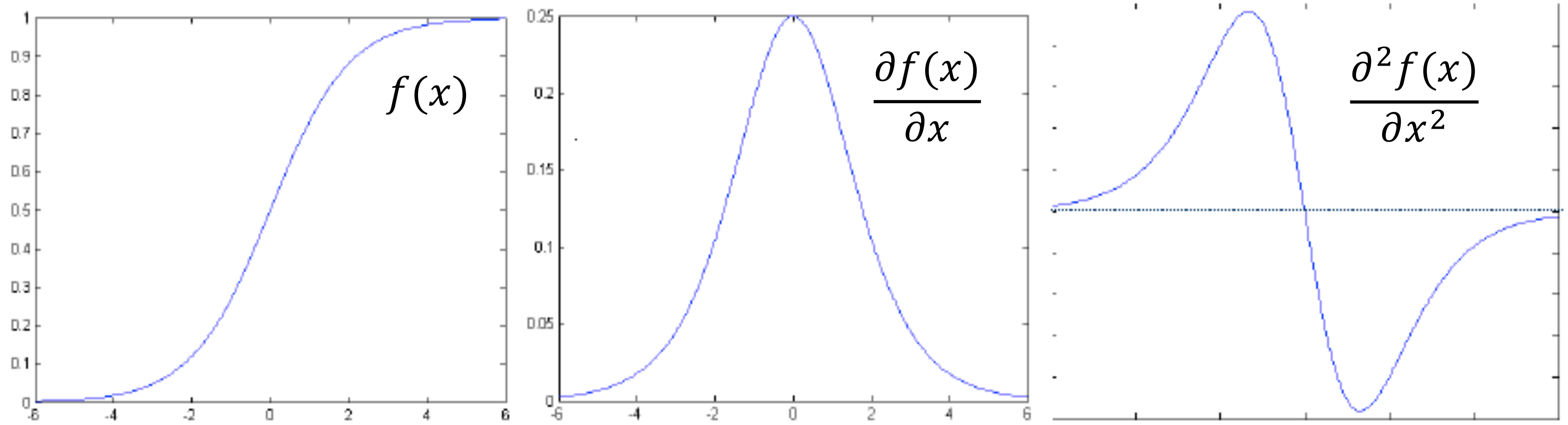
Antes



Depois

Filtro derivativo “Laplaciano”

O filtro laplaciano distingue-se dos restantes filtros de realce de fronteiras porque usa a informação de segundas derivadas relativa às variações de intensidade dos pixels.



Função Gradiente Laplaciano

Fernando Soares

Filtro derivativo “Laplaciano”

- No espaço 2D o laplaciano define-se como:

$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

- As exigências para a definição do laplaciano digital são as de o coeficiente associado com o pixel central ser positivo e os coeficientes dos pixels externos serem negativos.

- Como o laplaciano é uma derivada, a soma dos coeficientes tem que ser nula (toda a vez que o ponto em questão e seus vizinhos tiverem o mesmo valor, a resposta será nula).

Fernando Soares

Filtro derivativo "Laplaciano"

- No caso discreto, para uma vizinhança de 3×3, o laplaciano pode ser aproximado por um operador de conectividade-4 ou um de conectividade-8:

$$\nabla^2 f(i,j) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(i,j) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Filtro derivativo “Laplaciano”

- Usando qualquer um dos anteriores kernels, o laplaciano pode ser calculado por convolução:

$$\nabla^2 f(i,j) = -f(i-1,j) - f(i+1,y) - f(i,j-1) - f(i,j+1) + 4\times f(i,j)$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(i,j) = &-f(i-1,j) - f(i+1,y) - f(i,j-1) - f(i,j+1) - \\ &-f(i-1,j-1) - f(i+1,j+1) - f(i-1,j+1) - f(i+1,j-1) + 8\times f(i,j)\end{aligned}$$

- Porque estes kernels são uma aproximação à segunda derivada, os operadores são bastante sensíveis à presença de ruído aleatório na imagem.

- Para atenuar o efeito da presença de ruído, a imagem é geralmente filtrada primeiro com um filtro passa-baixa gaussiano antes de aplicar o operador laplaciano. Esta tarefa reduz o ruído de alta frequência antes da diferenciação.

Filtros derivativo “Laplaciano do Gaussiano”

Como a operação de convolução é associativa, pode-se executar em primeiro lugar a convolução do filtro passa-baixa gaussiano com operador laplaciano, e só depois executar a convolução da imagem com este operador híbrido (*LoG - Laplacian of Gaussian*). Desta forma têm-se as seguintes vantagens:

- Como ambos os kernels gaussiano e laplaciano são geralmente bastante menores que a imagem, este método requer de longe muito menos operações aritméticas.

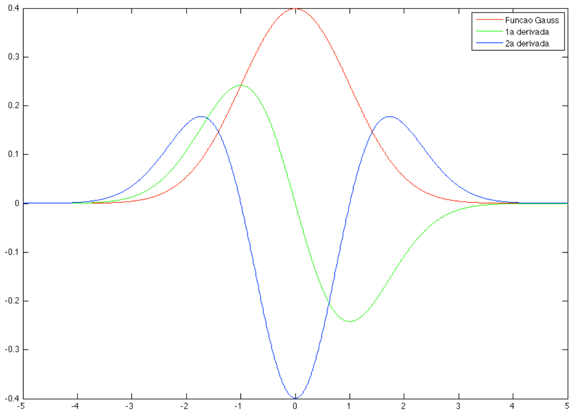
- O Kernel LoG pode ser pré-calculado antecipadamente e, como tal, é necessária de executar apenas uma convolução com a imagem.

Filtros derivativo “Laplaciano do Gaussiano”

Laplaciano do Gaussiano:

$$G(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Função gaussiana



$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times \left(\frac{x^2-\sigma^2}{\sigma^4}\right) \times e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)}$$

2ª derivada em ordem a x

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times \left(\frac{y^2-\sigma^2}{\sigma^4}\right) \times e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)}$$

2ª derivada em ordem a y

$$LoG\big(G(x,y)\big) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} G(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times \left(\frac{x^2+y^2-2\sigma^2}{\sigma^4}\right) \times e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Laplacian of Gaussian

Filtros derivativo “Laplaciano do Gaussiano”

Exemplo:

RGB

LoG de apenas uma componente (R)

LoG conjunto (3 componentes)